

Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes

Henry de Thélin

Résumé

Soit f une application méromorphe dominante d'une variété Kählérienne compacte. Nous donnons une inégalité pour les exposants de Lyapounov d'une classe de mesures ergodiques de f en utilisant l'entropie métrique et les degrés dynamiques de f . Nous en déduisons l'hyperbolicité de certaines mesures.

Abstract

Let f be a dominating meromorphic self-map of a compact Kähler manifold. We give an inequality for the Lyapounov exponents of some ergodic measures of f using the metric entropy and the dynamical degrees of f . We deduce the hyperbolicity of some measures.

Mots-clefs : applications méromorphes, exposants de Lyapounov, entropie.

Classification : 37Fxx, 32H50, 58F15.

Introduction

Soit (X, ω) une variété Kählérienne compacte de dimension k et $f : X \mapsto X$ une application méromorphe dominante.

Nous désignerons par C_f l'ensemble critique de f et par I_f son ensemble d'indétermination.

L'objet de cet article est de donner des formules générales pour les exposants de Lyapounov des mesures invariantes μ qui intègrent la fonction $\log d(x, \mathcal{A})$ où d est la distance dans X et $\mathcal{A} = C_f \cup I_f$. Remarquons que lorsqu'une mesure μ intègre la fonction précédente, elle ne charge pas l'ensemble \mathcal{A} : on peut donc définir $f_*\mu$ et parler de mesure invariante. Par ailleurs, l'hypothèse d'intégrabilité de $\log d(x, \mathcal{A})$ est vérifiée dès que μ intègre les fonctions quasi-psh. Les formules dépendront d'une part de l'entropie métrique $h(\mu)$ de μ et d'autre part des degrés dynamiques d_q de f (voir le paragraphe 1 pour leur définition).

Dans ce contexte nous avons le

Théorème 1. Soient μ une mesure invariante, ergodique telle que $\log d(x, \mathcal{A}) \in L^1(\mu)$ et $\chi_1 \geq \dots \geq \chi_k$ les exposants de Lyapounov de μ (ils sont bien définis).

Fixons $1 \leq s \leq k$. On définit $l = l(s)$ et $l' = l'(s)$ par les formules suivantes :

$$\chi_1 \geq \dots \geq \chi_{s-l-1} > \chi_{s-l} = \dots = \chi_s = \dots = \chi_{s+l'} > \chi_{s+l'+1} \geq \dots \geq \chi_k,$$

où $s - l$ est égal à 1 si $\chi_1 = \dots = \chi_s$ et $s + l'$ est égal à k lorsque $\chi_s = \dots = \chi_k$.

Alors, on a les inégalités suivantes :

$$h(\mu) \leq \max_{0 \leq q \leq s-l-1} \log d_q + 2\chi_{s-l}^+ + \dots + 2\chi_k^+$$

$$h(\mu) \leq \max_{s+l' \leq q \leq k} \log d_q - 2\chi_1^- - \dots - 2\chi_{s+l'}^-$$

avec $\chi_i^+ = \max(\chi_i, 0)$ et $\chi_i^- = \min(\chi_i, 0)$.

Signalons la ressemblance entre ces formules et celles de J. Buzzi pour les applications $C^{1+\alpha}$ (voir [5]).

Maintenant, à l'aide de notre théorème, on a :

Corollaire 2. Supposons que les degrés dynamiques vérifient $d_1 \leq \dots \leq d_{s-1} < d_s > d_{s+1} \geq \dots \geq d_k$. Soit μ une mesure invariante, ergodique telle que $\log d(x, \mathcal{A}) \in L^1(\mu)$ et $h(\mu) > \max(\log d_{s-1}, \log d_{s+1})$ (ou $h(\mu) > \log d_{k-1}$ si $s = k$). Alors

$$\chi_1 \geq \dots \geq \chi_s \geq \frac{1}{2}(h(\mu) - \log d_{s-1}) > 0$$

et

$$0 > \frac{1}{2}(\log d_{s+1} - h(\mu)) \geq \chi_{s+1} \geq \dots \geq \chi_k.$$

En particulier la mesure μ est hyperbolique.

Lorsque dans le corollaire précédent la mesure μ est d'entropie $\log d_s$ (i.e. est d'entropie maximale par [8] et [7]), on obtient le :

Corollaire 3. Soit μ une mesure invariante, ergodique telle que $\log d(x, \mathcal{A}) \in L^1(\mu)$. Alors, si $h(\mu) = \log d_s$ avec $d_1 \leq \dots \leq d_{s-1} < d_s > d_{s+1} \geq \dots \geq d_k$ on a :

$$\chi_1 \geq \dots \geq \chi_s \geq \frac{1}{2} \log \frac{d_s}{d_{s-1}} > 0$$

et

$$0 > \frac{1}{2} \log \frac{d_{s+1}}{d_s} \geq \chi_{s+1} \geq \dots \geq \chi_k.$$

En particulier la mesure μ est hyperbolique.

Notons que les inégalités obtenues dans ce corollaire sont celles qui étaient conjecturées (voir [17] Conjecture 3.2).

Les hypothèses de ce corollaire sont vérifiées dans de nombreuses situations. En voici certaines.

Tout d'abord pour les endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k avec la mesure de Green μ (voir [12] et [13] pour sa définition). En effet, la mesure μ est mélangeante et intègre $\log d(x, \mathcal{A})$ grâce à l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg. Pour ces endomorphismes, l'entropie métrique de μ vaut $k \log(d)$ et les d_q valent d^q . En appliquant notre inégalité avec $s = k$, on a alors la minoration du plus petit exposant de μ par $\frac{\log(d)}{2}$ et on retrouve ainsi un résultat de J.-Y. Briend et J. Duval (voir [2]).

De la même façon, lorsque f est une application méromorphe sur une variété projective, avec son degré topologique strictement plus grand que les autres (i.e. $s = k$ dans le corollaire précédent), V. Guedj a construit une mesure μ mélangeante, d'entropie $\log d_k$ et qui intègre les fonctions quasi-psh (voir [16] et [8]). En utilisant notre formule, on retrouve alors la minoration du plus petit exposant de Lyapounov de μ par $\frac{1}{2} \log(d_k/d_{k-1})$ qu'il avait démontrée.

Lorsque f est un automorphisme holomorphe d'une variété Kählérienne qui possède un degré dynamique strictement plus grand que les autres, T.-C. Dinh et N. Sibony ont construit une mesure de Green μ mélangeante qui intègre les fonctions quasi-psh et d'entropie $\max \log d_q$ (voir [10]). Notre corollaire s'applique donc et on obtient ainsi un nouveau résultat pour ces automorphismes.

De la même façon, lorsque f est une application birationnelle régulière de \mathbb{P}^k (voir [9]), T.-C. Dinh et N. Sibony ont construit une mesure de Green μ mélangeante et qui intègre la fonction $\log d(x, \mathcal{A})$ (ici $I_f = I^+$ et $C_f = f^{-1}(I^-)$). On peut donc lui appliquer le corollaire.

Donnons une autre conséquence de notre théorème. Lorsque l'on applique la première formule du théorème avec $s = 1$ on en déduit une formule de Ruelle ([22]) pour les applications méromorphes :

Corollaire 4. *Soit μ une mesure invariante, ergodique telle que $\log d(x, \mathcal{A}) \in L^1(\mu)$. Alors :*

$$h(\mu) \leq 2\chi_1^+ + \cdots + 2\chi_k^+.$$

Voici le plan de ce texte. Dans un premier paragraphe nous ferons des rappels sur les applications méromorphes et dans le second nous démontrerons les corollaires 2 et 3. Dans le troisième nous parlerons de théorie de Pesin pour les applications méromorphes et dans le quatrième, nous ferons des rappels sur la transformée de graphe. Enfin, le cinquième paragraphe sera consacré à la démonstration de la première inégalité du théorème et le sixième à celle de la deuxième inégalité. Dans le dernier paragraphe nous donnerons un analogue de notre théorème pour les difféomorphismes de classe $C^{1+\alpha}$ dans les variétés Riemanniennes compactes.

1 Rappels sur les applications méromorphes

Commençons par rappeler la définition des degrés dynamiques de f (voir [23] et [7]).

On définit la forme $f^*(\omega^q)$ comme l'extension triviale de $(f|_{X \setminus I_f})^* \omega^q$.

On pose $\delta_q(f) := \int_X f^*(\omega^q) \wedge \omega^{k-q}$ pour $q = 0, \dots, k$. Le degré dynamique d'ordre q est alors :

$$d_q := \lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_q(f^n))^{1/n}.$$

Notons que $d_0 = 1$ et que la limite ci-dessus existe grâce à [7].

Dans [8] et [7], T.-C. Dinh et N. Sibony ont défini, via un procédé de régularisation de courant, le pull-back par f des courants positifs fermés de bidimension quelconque. En voici le procédé. Tout d'abord f est une submersion sur un ouvert de Zariski $\Omega_{1,f}$ de X . Si S est un courant positif fermé de bidegré (l, l) sur X , alors, on peut définir f^*S sur $\Omega_{1,f}$. C'est un courant positif fermé dont la masse $\int_{\Omega_{1,f}} f^*S \wedge \omega^{k-l}$ est majorée par $c_X \delta_l(f) \|S\|$ (voir le lemme 4 de [8] et le corollaire 1.3 de [7], ici c_X est une constante qui ne dépend que de X). Ce courant admet donc un prolongement trivial $\widetilde{f^*S}$ à X tout entier d'après un théorème de H. Skoda ([24]). De plus $\widetilde{f^*S}$ est un courant positif fermé de masse majorée par $c_X \delta_l(f) \|S\|$. Ce courant sera appelé le pull-back de S par f .

Nous allons maintenant donner deux lemmes qui seront utilisés dans la démonstration du théorème. Le premier est quasiment le même que le Lemme 5 de [8]. On notera $\Omega_f = X \setminus \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(I_f)$.

Lemme 5. *Soit $\epsilon > 0$. Il existe une constante $c_\epsilon > 0$ telle que pour tout $q = 0, \dots, k$ on ait :*

$$\int_{\Omega_f} \omega^{k-q} \wedge (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_q})^* \omega \leq c_\epsilon (\max_{0 \leq j \leq q} d_j + \epsilon)^{n_1}$$

pour tous les entiers naturels $n_1 \geq \dots \geq n_q \geq 0$.

Démonstration. La démonstration est la même que dans [8]. Nous la donnons par confort pour le lecteur.

Soit $c > 0$ une constante telle que $\delta_j(f^n) \leq c(d_j + \epsilon)^n$ pour tout $n \geq 0$ et tout $j = 0, \dots, k$.

Soit $\Omega_{n,f} = X \setminus \cup_{0 \leq i \leq n-1} f^{-i}(C)$ où $C = X \setminus \Omega_{1,f}$. On va montrer par récurrence sur q , avec $0 \leq q \leq k$ que pour tous $n_1 \geq \dots \geq n_q \geq 0$, on a $\|T_q\| = \int_{\Omega_{n_1,f}} T_q \wedge \omega^{k-q} \leq c^q c_X^q (\max_{0 \leq j \leq q} d_j + \epsilon)^{n_1}$ où

$$T_q = (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_q})^* \omega,$$

et $T_0 = 1$.

C'est vrai pour $q = 0$. Supposons la propriété vraie au rang $q - 1$. Cela implique que $\|T'_{q-1}\| \leq c^{q-1} c_X^{q-1} (\max_{0 \leq j \leq q-1} d_j + \epsilon)^{n_1 - n_q}$ avec

$$T'_{q-1} = (f^{n_1 - n_q})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_{q-1} - n_q})^* \omega.$$

Le courant T'_{q-1} est donc de masse finie sur $\Omega_{n_1-n_q, f}$. Il admet donc une extension triviale $\widetilde{T'_{q-1}}$ dans X qui est un courant positif fermé de masse majorée par $c^{q-1}c_X^{q-1}(\max_{0 \leq j \leq q-1} d_j + \epsilon)^{n_1-n_q}$. En utilisant la propriété du pull-back de T.-C. Dinh et N. Sibony énoncée avant le lemme avec $S = \widetilde{T'_{q-1}} \wedge \omega$, on obtient :

$$\|T_q\| = \|(f^{n_q})^*(T'_{q-1} \wedge \omega)\| \leq c_X \delta_q(f^{n_q}) \|T'_{q-1}\| \leq c^q c_X^q (\max_{1 \leq j \leq q} d_j + \epsilon)^{n_1}.$$

Cela démontre bien le lemme. □

On utilisera aussi le lemme suivant :

Lemme 6. *Soit $\epsilon > 0$. Il existe une constante $c_\epsilon > 0$ telle que pour tout $q = 0, \dots, k$ on ait :*

$$\int_{\Omega_f} (f^n)^* \omega^q \wedge (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_{k-q}})^* \omega \leq c_\epsilon (\max_{q \leq j \leq k} d_j + \epsilon)^n$$

pour tous les entiers naturels $n \geq n_1 \geq \dots \geq n_{k-q} \geq 0$.

Démonstration. Soit $c > 0$ une constante telle que $\delta_j(f^n) \leq c(d_j + \epsilon)^n$ pour tout $n \geq 0$ et tout $j = 0, \dots, k$. Fixons q entre 0 et k . On peut supposer $q > 0$ sinon on a le résultat par le lemme précédent.

On va montrer par récurrence sur j , avec $0 \leq j \leq k - q$ que pour tous $n \geq n_1 \geq \dots \geq n_j \geq 0$, on a $\|T_j\| = \int_{\Omega_{n,f}} T_j \wedge \omega^{k-j-q} \leq c^{j+1} c_X^j (\max_{q \leq l \leq q+j} d_l + \epsilon)^n$ où

$$T_j = (f^n)^* \omega^q \wedge (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_j})^* \omega,$$

et $T_0 = (f^n)^* \omega^q$.

C'est vrai pour $j = 0$ par définition du q -ème degré dynamique. Supposons la propriété vraie au rang $j - 1$. Cela implique que $\|T'_{j-1}\| \leq c^j c_X^{j-1} (\max_{q \leq l \leq q+j-1} d_l + \epsilon)^{n-n_j}$ où

$$T'_{j-1} = (f^{n-n_j})^* \omega^q \wedge (f^{n_1-n_j})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_{j-1}-n_j})^* \omega.$$

Le courant T'_{j-1} est donc de masse finie sur $\Omega_{n-n_j, f}$. Il admet donc une extension triviale $\widetilde{T'_{j-1}}$ dans X qui est un courant positif fermé de masse majorée par $c^j c_X^{j-1} (\max_{q \leq l \leq q+j-1} d_l + \epsilon)^{n-n_j}$. En utilisant encore la propriété du pull-back de T.-C. Dinh et N. Sibony avec $S = \widetilde{T'_{j-1}} \wedge \omega$, on obtient :

$$\|T_j\| = \|(f^{n_j})^*(T'_{j-1} \wedge \omega)\| \leq c_X \delta_{q+j}(f^{n_j}) \|T'_{j-1}\| \leq c^{j+1} c_X^j (\max_{q \leq l \leq q+j} d_l + \epsilon)^n.$$

Cela démontre la récurrence et quand on prend $j = k - q$, on obtient le lemme. □

2 Démonstration des corollaires 2 et 3

On suppose ici que les degrés dynamiques de f vérifient $d_1 \leq \dots \leq d_{s-1} < d_s > d_{s+1} \geq \dots \geq d_k$. Soit μ une mesure invariante, ergodique telle que $\log d(x, \mathcal{A}) \in L^1(\mu)$ et $h(\mu) > \max(\log d_{s-1}, \log d_{s+1})$ (ou $h(\mu) > \log d_{k-1}$ si $s = k$). Montrons par l'absurde que $\chi_s > 0$ et $\chi_{s+1} < 0$.

Si $\chi_s \leq 0$ alors $\chi_{s-l}^+ = \dots = \chi_s^+ = \dots = \chi_k^+ = 0$ et la première formule du théorème donnerait $\log d_{s-1} < h(\mu) \leq \log d_{s-l-1}$ qui est absurde. De même si $\chi_{s+1} \geq 0$, on applique la deuxième formule avec $s = s+1$ et on obtient $\log d_{s+1} < h(\mu) \leq \log d_{s+1+l'}$ qui est une contradiction (ici $\chi_1^- = \dots = \chi_{s+1}^- = \dots = \chi_{s+1+l'}^- = 0$).

Passons à la minoration de χ_s . Par la première formule du théorème et on a :

$$h(\mu) \leq \log d_{s-l-1} + 2(l+1)\chi_s$$

car par ce que l'on a fait précédemment on a $\chi_{s+1}^+ = \dots = \chi_k^+ = 0$ et $\chi_s^+ = \chi_s$. On obtient $\chi_s \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l+1} h(\mu) - \frac{1}{l+1} \log d_{s-l-1} \right)$. La concavité de la fonction $q \rightarrow \log d_q$ (voir [16] et [14]) implique $\log d_{s-1} \geq \frac{1}{l+1} \log d_{s-l-1} + (1 - \frac{1}{l+1}) \log d_s$. On a donc

$$\chi_s \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l+1} h(\mu) - \frac{1}{l+1} \log d_s - \log d_{s-1} + \log d_s \right).$$

Mais comme $h(\mu) \leq \log d_s$ (voir [8] et [7]), cette dernière quantité est supérieure à $\frac{1}{2}(h(\mu) - \log d_s - \log d_{s-1} + \log d_s)$, ce qui nous donne la minoration de χ_s que l'on cherche.

Pour la majoration de χ_{s+1} la méthode est exactement la même à condition d'utiliser la deuxième formule avec $s = s+1$.

3 Théorie de Pesin et applications

Dans ce paragraphe, on considère une mesure de probabilité invariante, ergodique μ telle que $\log d(x, \mathcal{A}) \in L^1(\mu)$ (avec $\mathcal{A} = C_f \cup I_f$). On va voir que cette hypothèse permet de définir les exposants de Lyapounov pour μ et de faire de la théorie de Pesin.

Tout d'abord, on définit l'extension naturelle \widehat{X} de X par :

$$\widehat{X} := \{\widehat{x} = (\dots, x_{-n}, \dots, x_0, \dots, x_n, \dots) \in X^{\mathbb{Z}}, f(x_{-n}) = x_{-n+1}\}.$$

C'est l'ensemble des histoires des points de X . Dans cet espace f induit une application \widehat{f} qui est le décalage à droite et si on note π la projection canonique $\pi(\widehat{x}) = x_0$, alors μ se relève en une unique probabilité $\widehat{\mu}$ invariante par \widehat{f} qui vérifie $\pi_* \widehat{\mu} = \mu$.

Dans l'espace \widehat{X} , on ne gardera que les orbites qui ne visitent pas l'ensemble \mathcal{A} . On considère donc :

$$\widehat{X}^* = \{\widehat{x} \in \widehat{X}, x_n \notin \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Cet ensemble est invariant par \hat{f} et $\hat{\mu}(\hat{X}^*) = 1$ car $\mu(\mathcal{A}) = 0$.

Maintenant, on peut munir X d'une famille de cartes $(\tau_x)_{x \in X}$ telles que $\tau_x(0) = x$, τ_x est définie sur une boule $B(0, \epsilon_0)$ avec ϵ_0 indépendant de x et la norme de la dérivée première et seconde de τ_x sur $B(0, \epsilon_0)$ est majorée par une constante indépendante de x . Pour construire ces cartes il suffit de partir d'une famille finie (U_i, ψ_i) de cartes de X et de les composer par des translations.

Dans toute la suite, on notera $f_x = \tau_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \tau_x$ qui est définie au voisinage de 0 quand x n'est pas dans I_f et on posera aussi :

$$f_x^n = f_{f^{n-1}(x)} \circ \dots \circ f_x$$

$$f_{\hat{x}}^{-n} = f_{x_{-n}}^{-1} \circ \dots \circ f_{x_{-1}}^{-1}$$

où dans $f_{x_{-i}}^{-1}$ on a pris la bonne branche inverse de f par rapport à \hat{x} : celle qui envoie x_{-i+1} sur x_{-i} .

Pour $\hat{x} \in \hat{X}^*$ on définit $D\hat{f}(\hat{x}) = Df_x(0)$ (où $\pi(\hat{x}) = x$). L'application $D\hat{f}$ va de \hat{X}^* dans $GL(k, \mathbb{C})$ et c'est à ce cocycle que nous allons appliquer la théorie de Pesin. Tout d'abord, nous avons le :

Lemme 7. *Les fonctions $\log^+ \|D\hat{f}(\hat{x})\|$ et $\log^+ \|(D\hat{f}(\hat{x}))^{-1}\|$ sont dans $L^1(\hat{\mu})$.*

Démonstration. Commençons par montrer que $\log^+ \|D\hat{f}(\hat{x})\|$ est dans $L^1(\hat{\mu})$.

Si on applique le lemme 2.1 de l'article [6] de T.-C. Dinh et C. Dupont à f , on obtient :

Il existe $\tau > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout x hors de I_f :

$$\|Df(x)\| + \|D^2f(x)\| \leq \tau d(x, I_f)^{-p}.$$

On en déduit :

$$\log \|Df_x(0)\| \leq \log \tau + \log d(x, \mathcal{A})^{-p}$$

d'où

$$\log^+ \|Df_x(0)\| \leq \log \tau + \log d(x, \mathcal{A})^{-p}$$

car on peut supposer $\tau > 1$ et que le diamètre de X est inférieur à 1. Mais

$$\int \log^+ \|D\hat{f}(\hat{x})\| d\hat{\mu}(\hat{x}) = \int \log^+ \|Df_{\pi(\hat{x})}(0)\| d\hat{\mu}(\hat{x})$$

qui est égal à

$$\int \log^+ \|Df_x(0)\| d(\pi_* \hat{\mu})(\hat{x}) = \int \log^+ \|Df_x(0)\| d\mu(x).$$

Comme par hypothèse sur μ , la fonction $\log d(x, \mathcal{A})$ est dans $L^1(\mu)$, on en déduit que la dernière intégrale ci-dessus est finie. Autrement dit, la fonction $\log^+ \|D\hat{f}(\hat{x})\|$ est bien dans $L^1(\hat{\mu})$.

Passons maintenant à $\log^+ \|(D\hat{f}(\hat{x}))^{-1}\|$. Comme dans le lemme 2.1 de [6], nous allons utiliser l'inégalité de Lojasiewicz (voir [20], IV.7.2). En effet cette inégalité nous donne :

Il existe $\tau' > 0$ et $p' \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout x hors de C_f :

$$|\text{Jac}f(x)|^2 \geq \tau' d(x, C_f)^{p'}.$$

Ensuite, grâce à l'estimée du lemme 2.1 de [6] donnée plus haut, on sait que les modules des valeurs propres de $Df(x)^H Df(x)$ sont majorés par $\tau^2 d(x, I_f)^{-2p}$ (ici la matrice $Df(x)^H$ est la transposée-conjuguée de $Df(x)$). Le minimum des modules des valeurs propres de la matrice $Df(x)^H Df(x)$ est donc minoré par $\frac{\tau'}{\tau^{2(k-1)}} d(x, C_f)^{p'} d(x, I_f)^{2p(k-1)}$. Cela implique que $\|(Df(x))^{-1}\|$ est majorée par $\tau'' d(x, C_f \cup I_f)^{-p''}$ pour certains $\tau'' > 0$ et $p'' \in \mathbb{N}^*$.

On a donc :

$$\log \|(Df_x(0))^{-1}\| \leq \log \tau'' + \log d(x, \mathcal{A})^{-p''}$$

qui est une fonction intégrable pour μ .

Comme précédemment on en déduit que $\log^+ \|(D\hat{f}(\hat{x}))^{-1}\|$ est dans $L^1(\hat{\mu})$.

□

Grâce à ce lemme on peut appliquer le théorème d'Oseledec et le théorie de Pesin au cocycle $D\hat{f}$. On a (voir [18]) :

Théorème. (*Oseledec*)

Il existe un ensemble invariant $\hat{Y} \subset \hat{X}^*$ avec $\hat{\mu}(\hat{Y}) = 1$ tel que pour tout $\hat{x} \in \hat{Y}$ on ait :

1) L'existence d'une décomposition de \mathbb{C}^k :

$$\mathbb{C}^k = \oplus_{i=1}^q E_i(\hat{x}),$$

où les $E_i(\hat{x})$ vérifient $D\hat{f}(\hat{x})E_i(\hat{x}) = E_i(\hat{f}(\hat{x}))$.

2) L'existence de fonctions (exposants de Lyapounov de f) :

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_q,$$

avec

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|m|} \log \|A(\hat{x}, m)v\| = \pm\lambda_i$$

pour tout $v \in E_i(\hat{x}) \setminus \{0\}$. Ici les $A(\hat{x}, m)$ sont définis par :

$$A(\hat{x}, m) = D\hat{f}(\hat{f}^{m-1}(\hat{x})) \circ \dots \circ D\hat{f}(\hat{x}) \text{ pour } m > 0$$

$$A(\hat{x}, 0) = Id$$

$$A(\hat{x}, m) = D\hat{f}(\hat{f}^m(\hat{x}))^{-1} \circ \dots \circ D\hat{f}(\hat{f}^{-1}(\hat{x}))^{-1} \text{ pour } m < 0.$$

De plus, nous avons le :

Théorème. (γ -réduction de Pesin)

Pour tout $\gamma > 0$ il existe une fonction $C_\gamma : \widehat{X}^* \rightarrow GL(k, \mathbb{C})$ telle que :

- 1) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|C_\gamma^{\pm 1}(\widehat{f}^m(\widehat{x}))\| = 0$ (on parle de fonction tempérée).
- 2) Pour presque tout \widehat{x} , la matrice $A_\gamma(\widehat{x}) = C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x}))D\widehat{f}(\widehat{x})C_\gamma(\widehat{x})$ a la forme suivante :

$$A_\gamma(\widehat{x}) = \begin{pmatrix} A_\gamma^1(\widehat{x}) & & \\ & \ddots & \\ & & A_\gamma^q(\widehat{x}) \end{pmatrix}$$

où chaque $A_\gamma^i(\widehat{x})$ est une matrice carrée de taille $\dim E_i(\widehat{x}) \times \dim E_i(\widehat{x})$ et on a :

$$e^{\lambda_i - \gamma} \leq \|A_\gamma^i(\widehat{x})^{-1}\|^{-1} \text{ et } \|A_\gamma^i(\widehat{x})\| \leq e^{\lambda_i + \gamma}.$$

- 3) Enfin, pour presque tout \widehat{x} l'application $C_\gamma(\widehat{x})$ envoie la décomposition standard $\oplus_{i=1}^q \mathbb{C}^{\dim E_i(\widehat{x})}$ sur $\oplus_{i=1}^q E_i(\widehat{x})$.

Dans toute la suite nous noterons \widehat{Y} l'ensemble des points de \widehat{X}^* qui vérifient les conclusions de ces deux théorèmes. De plus, pour $\widehat{x} \in \widehat{Y}$, nous appellerons $\chi_1 \geq \dots \geq \chi_k$ les exposants de Lyapounov de $\widehat{\mu}$ notés avec répétition (contrairement aux λ_i du théorème précédent).

Notons maintenant $g_{\widehat{x}}$ la lecture de f_x dans ces cartes (i.e. $g_{\widehat{x}} = C_\gamma^{-1}(\widehat{f}(\widehat{x})) \circ f_x \circ C_\gamma(\widehat{x})$ avec $\pi(\widehat{x}) = x$).

Nous allons donner quelques propriétés de $g_{\widehat{x}}$ (avec $\widehat{x} \in \widehat{Y}$) qui nous seront utiles pour la suite.

Proposition 8. Il existe des constantes $\tau > 0$, $\epsilon_0 > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ qui ne dépendent que de f et X telles que :

- 1) $g_{\widehat{x}}(0) = 0$

$$2) Dg_{\widehat{x}}(0) = \begin{pmatrix} A_\gamma^1(\widehat{x}) & & \\ & \ddots & \\ & & A_\gamma^q(\widehat{x}) \end{pmatrix}$$

- 3) Si on note $g_{\widehat{x}}(w) = Dg_{\widehat{x}}(0)w + h(w)$, on a :

$$\|Dh(w)\| \leq \tau \|C_\gamma(\widehat{f}(\widehat{x}))^{-1}\| \|C_\gamma(\widehat{x})\|^2 d(x, \mathcal{A})^{-p} \|w\|$$

pour $\|w\| \leq \epsilon_0 d(x, \mathcal{A}) / \|C_\gamma(\widehat{x})\|$.

Démonstration. Le premier point est évident. Le second provient immédiatement du théorème précédent. Il reste à prouver la troisième propriété.

On a $Dg_{\widehat{x}}(w) = Dg_{\widehat{x}}(0) + Dh(w)$, d'où :

$$\|Dh(w)\| = \|Dg_{\widehat{x}}(w) - Dg_{\widehat{x}}(0)\| \leq \|C_\gamma(\widehat{f}(\widehat{x}))^{-1}\| \|Df_x(C_\gamma(\widehat{x})w) - Df_x(0)\| \|C_\gamma(\widehat{x})\|.$$

Par l'estimée sur $\|D^2 f\|$ de T.-C. Dinh et C. Dupont qui se trouve au début de la démonstration du lemme précédent, on a :

$$\|Df_x(C_\gamma(\hat{x})w) - Df_x(0)\| \leq \tau d(\tau_x([0, C_\gamma(\hat{x})w]), \mathcal{A})^{-p} \|C_\gamma(\hat{x})w\|$$

pour $\|C_\gamma(\hat{x})w\| \leq \epsilon_0$. L'image par τ_x du segment $[0, C_\gamma(\hat{x})w]$ vit dans la boule $B(x, K\|C_\gamma(\hat{x})w\|)$ où K est une constante qui ne dépend que de X . On en déduit que pour $\|C_\gamma(\hat{x})w\| \leq \epsilon_0 d(x, \mathcal{A})$, on a :

$$\|Dh(w)\| \leq \|C_\gamma(\hat{f}(\hat{x}))^{-1}\| \|C_\gamma(\hat{x})\|^2 \tau (1 - K\epsilon_0)^{-p} d(x, \mathcal{A})^{-p} \|w\|.$$

Quitte à prendre ϵ_0 petit, on peut supposer que $K\epsilon_0$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ et donc modulo un changement de la constante τ on a la majoration voulue de $\|Dh(w)\|$. \square

Dans la démonstration des formules du théorème nous utiliserons aussi $g_{\hat{x}}^{-1} = C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-1}(\hat{x})) \circ f_{\hat{x}}^{-1} \circ C_\gamma(\hat{x}) = C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-1}(\hat{x})) \circ f_{x_{-1}}^{-1} \circ C_\gamma(\hat{x})$ et des estimées sur cette application qui sont données par la :

Proposition 9. *Il existe des constantes $\tau > 0$, $\epsilon_0 > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ qui ne dépendent que de f et X telles que :*

1) $g_{\hat{x}}^{-1}(w)$ est bien définie pour $\|w\| \leq \epsilon_0 d(x_{-1}, \mathcal{A})^p / \|C_\gamma(\hat{x})\|$.

2) $g_{\hat{x}}^{-1}(0) = 0$

$$3) Dg_{\hat{x}}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} (A_\gamma^1(\hat{f}^{-1}(\hat{x})))^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (A_\gamma^q(\hat{f}^{-1}(\hat{x})))^{-1} \end{pmatrix}$$

4) Si on note $g_{\hat{x}}^{-1}(w) = Dg_{\hat{x}}^{-1}(0)w + h(w)$, on a :

$$\|Dh(w)\| \leq \tau \|C_\gamma(\hat{f}^{-1}(\hat{x}))^{-1}\| \|C_\gamma(\hat{x})\|^2 d(x_{-1}, \mathcal{A})^{-p} \|w\|$$

pour $\|w\| \leq \epsilon_0 d(x_{-1}, \mathcal{A})^p / \|C_\gamma(\hat{x})\|$.

Démonstration. Commençons par démontrer que $g_{\hat{x}}^{-1}(w)$ est bien défini pour

$$\|w\| \leq \epsilon_0 d(x_{-1}, \mathcal{A})^p / \|C_\gamma(\hat{x})\|.$$

Cela va reposer sur le lemme 2 de [2] (construction de branches inverses).

Rappelons que grâce à l'estimée de T.-C. Dinh et C. Dupont qui se trouve au début de la démonstration du lemme précédent on a l'existence de $\tau' > 0$ et $p' \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout x hors de I_f :

$$\|Df(x)\| + \|D^2f(x)\| \leq \tau' d(x, I_f)^{-p'}$$

D'autre part, dans la preuve de ce lemme, on a obtenu aussi l'existence de $\tau'' > 0$ et $p'' \in \mathbb{N}^*$ avec $\|(Df(x))^{-1}\| \leq \tau'' d(x, C_f \cup I_f)^{-p''}$ pour x hors de $\mathcal{A} = C_f \cup I_f$.

Quitte à remplacer p' et p'' par le maximum des deux, on pourra supposer dans la suite que $p' = p''$ et de même $\tau' = \tau''$. Ce sont des constantes qui ne dépendent que de f et X .

Soit w tel que $\|w\| \leq \epsilon'_0 d(x_{-1}, \mathcal{A})$. On a $\tau_{x_{-1}}(w) \in B(x_{-1}, K\epsilon'_0 d(x_{-1}, \mathcal{A}))$ (où K ne dépend que de X) et alors :

$$\|Df_{x_{-1}}(w)\| + \|D^2 f_{x_{-1}}(w)\| + \|(Df_{x_{-1}}(w))^{-1}\| \leq 2\tau'(1-K\epsilon'_0)^{-p'} d(x_{-1}, \mathcal{A})^{-p'} \leq \tau' d(x_{-1}, \mathcal{A})^{-p'},$$

si on prend ϵ'_0 petit et quitte à renommer τ' .

L'inégalité ci-dessus combinée avec le lemme 2 de [2] implique que $f_{\hat{x}}^{-1}$ est définie sur une boule $B(0, \epsilon'_0 d(x_{-1}, \mathcal{A})^{3p'}/\tau'^3) = B(0, 2\epsilon_0 d(x_{-1}, \mathcal{A})^p)$. En particulier, $g_{\hat{x}}^{-1}(w) = C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-1}(\hat{x})) \circ f_{\hat{x}}^{-1} \circ C_\gamma(\hat{x})(w)$ est bien défini pour $\|w\| \leq 2\epsilon_0 d(x_{-1}, \mathcal{A})^p / \|C_\gamma(\hat{x})\|$.

Passons maintenant à la majoration de $\|Dh(w)\|$. Pour cela, comme dans la proposition précédente, il faut contrôler $\|D^2 f_{\hat{x}}^{-1}\|$.

L'image de $B(0, 2\epsilon_0 d(x_{-1}, \mathcal{A})^p)$ par $f_{\hat{x}}^{-1}$ est incluse dans $B(0, 1)$ (toujours par le lemme 2 de [2]). La formule de Cauchy nous donne donc :

$$\|Df_{\hat{x}}^{-1}(w)\| + \|D^2 f_{\hat{x}}^{-1}(w)\| \leq \tau'' d(x_{-1}, \mathcal{A})^{-p''},$$

pour $\|w\| \leq \epsilon_0 d(x_{-1}, \mathcal{A})^p$.

Grâce à cette majoration, on peut maintenant contrôler $\|Dh(w)\|$. On a :

$$\|Dh(w)\| = \|Dg_{\hat{x}}^{-1}(w) - Dg_{\hat{x}}^{-1}(0)\| \leq \|C_\gamma(\hat{f}^{-1}(\hat{x}))^{-1}\| \|Df_{\hat{x}}^{-1}(C_\gamma(\hat{x})w) - Df_{\hat{x}}^{-1}(0)\| \|C_\gamma(\hat{x})\|,$$

d'où :

$$\|Dh(w)\| \leq \tau'' \|C_\gamma(\hat{f}^{-1}(\hat{x}))^{-1}\| \|C_\gamma(\hat{x})\|^2 d(x_{-1}, \mathcal{A})^{-p''} \|w\|,$$

pour $\|w\| \leq \epsilon_0 d(x_{-1}, \mathcal{A})^p / \|C_\gamma(\hat{x})\|$.

Cela démontre bien la proposition quitte à prendre le maximum entre p et p'' .

□

Dans les deux propositions, on voit que la distance de x à l'ensemble \mathcal{A} joue un rôle crucial. Comme on les utilisera le long d'orbites de point, on aura besoin de savoir la distance entre $f^i(x)$ et \mathcal{A} . Celle-ci est donnée par le :

Lemme 10. *Il existe un ensemble \hat{Y} dans \hat{X} de mesure pleine pour $\hat{\mu}$ tel que pour tout $\hat{x} \in \hat{Y}$ on ait :*

$$d(x_n, \mathcal{A}) \geq V(\hat{x}) e^{-\gamma|n|}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ici V est une fonction mesurable à valeur dans \mathbb{R}_+^* .

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Birkhoff à la fonction $u(\hat{x}) = \log d(\pi(\hat{x}), \mathcal{A})$ qui est dans $L^1(\hat{\mu})$ (voir par exemple le Lemme 2.3 de [6]).

□

Dans toute la suite, \hat{Y} désignera le sous-ensemble de points de \hat{X}^* qui vérifient les théorèmes d'Oseledec, de γ -réduction de Pesin et les conclusions du lemme précédent.

Nous allons maintenant faire des rappels sur la transformée de graphe.

4 Transformée de graphe

La cadre de ce paragraphe est \mathbb{C}^k . Dans toute la suite $\|\cdot\|$ désignera la norme Euclidienne.

On considère

$$g(X, Y) = (AX + R(X, Y), BY + U(X, Y))$$

avec $(X, 0) \in E_1$ (abscisses), $(0, Y) \in E_2$ (ordonnées) et A, B des matrices. On suppose aussi que $g(0, 0) = (0, 0)$ et $\max(\|DR(Z)\|, \|DU(Z)\|) \leq \delta$ dans la boule $B(0, r)$. Enfin par hypothèse, on aura $\gamma \leq \|A\| \leq \|B^{-1}\|^{-1}(1 - \gamma)$. Soit maintenant $\{(\Phi(Y), Y), Y \in D\}$ un graphe dans $B(0, r)$ au-dessus d'une partie D de E_2 qui vérifie $\|\Phi(Y_1) - \Phi(Y_2)\| \leq \gamma_0 \|Y_1 - Y_2\|$. Dans le théorème qui suit, on donne des conditions sur δ, γ et γ_0 pour que l'image de ce graphe par g soit un graphe qui vérifie le même contrôle.

Théorème. *Si $\delta \|B^{-1}\| (1 + \gamma_0) < 1$ alors l'image par g du graphe précédent est un graphe au-dessus de $\pi_0(g(\text{graphe de } \Phi))$ où π_0 est la projection sur les ordonnées. Par ailleurs, si $(\Psi(Y), Y)$ désigne ce nouveau graphe, on a :*

$$\|\Psi(Y_1) - \Psi(Y_2)\| \leq \frac{\|A\| \gamma_0 + \delta(1 + \gamma_0)}{\|B^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0)} \|Y_1 - Y_2\|$$

qui est inférieur à $\gamma_0 \|Y_1 - Y_2\|$ si $\delta \leq \epsilon(\gamma_0, \gamma)$.

Enfin, si de plus $B(0, \alpha) \subset D$ et $\|\Phi(0)\| \leq \beta$, alors $\pi_0(g(\text{graphe de } \Phi))$ contient $B(0, (\|B^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\alpha - \|A\|\beta - \delta\beta - \|D^2g\|_{B(0,r)}\beta^2)$ et $\|\Psi(0)\| \leq (1 + \gamma_0)(\|A\|\beta + \delta\beta + \|D^2g\|_{B(0,r)}\beta^2)$ (si $\delta \leq \epsilon(\gamma_0, \gamma)$).

Démonstration. La démonstration est tirée essentiellement de [18] mais nous préférons la donner par confort pour le lecteur.

Soit $\lambda(Y) = BY + U(\Phi(Y), Y)$. C'est l'ordonnée de $g(\Phi(Y), Y)$. Pour démontrer que $g(\text{graphe de } \Phi)$ est un graphe au-dessus de $\pi_0(g(\text{graphe de } \Phi))$, il suffit de voir que λ est une bijection de D sur $\lambda(D)$ c'est-à-dire que $\lambda(Y) = Y_0$ a une unique solution pour $Y_0 \in \lambda(D)$.

Posons $\gamma(Y) = B^{-1}Y_0 - B^{-1}U(\Phi(Y), Y)$. On a que $\lambda(Y) = Y_0$ est équivalent à $\gamma(Y) = Y$. Mais, si Y_1, Y_2 sont dans D , on a :

$$\|\gamma(Y_1) - \gamma(Y_2)\| \leq \|B^{-1}\| \|U(\Phi(Y_1), Y_1) - U(\Phi(Y_2), Y_2)\|$$

qui est inférieur à $\|B^{-1}\| \delta(1 + \gamma_0) \|Y_1 - Y_2\|$. Autrement dit, quand $\delta \|B^{-1}\| (1 + \gamma_0) < 1$, alors $\gamma(Y) = Y$ a bien une unique solution dans D .

Passons maintenant au contrôle de la pente du graphe $(\Psi(Y), Y)$ que l'on a obtenu.

On considère $(\Psi(Y'_1), Y'_1)$ et $(\Psi(Y'_2), Y'_2)$ deux points du graphe. Ils sont l'image de $(\Phi(Y_1), Y_1)$ et $(\Phi(Y_2), Y_2)$ par g . On notera $X'_i = \Psi(Y'_i)$ ($i = 1, 2$). Alors, d'une part :

$$\|X'_1 - X'_2\| = \|A\Phi(Y_1) + R(\Phi(Y_1), Y_1) - A\Phi(Y_2) - R(\Phi(Y_2), Y_2)\|$$

qui est inférieur à

$$(\|A\|\gamma_0 + \delta(1 + \gamma_0))\|Y_1 - Y_2\|.$$

D'autre part :

$$\|Y'_1 - Y'_2\| = \|BY_1 + U(\Phi(Y_1), Y_1) - BY_2 - U(\Phi(Y_2), Y_2)\|$$

qui est supérieur à

$$(\|B^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\|Y_1 - Y_2\|$$

car $\|B(Y_1 - Y_2)\| \geq \|B^{-1}\|^{-1}\|Y_1 - Y_2\|$.

En combinant ces deux inégalités, on obtient :

$$\|\Psi(Y'_1) - \Psi(Y'_2)\| \leq \frac{\|A\|\gamma_0 + \delta(1 + \gamma_0)}{\|B^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0)}\|Y'_1 - Y'_2\|$$

qui est l'inégalité cherchée.

Passons maintenant aux dernières estimations.

Tout d'abord on veut majorer la distance entre $(0, 0)$ et l'image de $(\Phi(0), 0)$ par g . Soit v le vecteur $(\Phi(0), 0)$ normalisé de sorte que $\|v\| = 1$. Si P est un point du segment $[(0, 0), (\Phi(0), 0)]$, on a :

$$\|Dg(P)v - Dg(0)v\| \leq \|D^2g\|_{B(0,r)}\|P\|$$

Mais $\|Dg(0)v\| \leq \|A\| + \delta$ donc :

$$\|Dg(P)v\| \leq \|A\| + \delta + \|D^2g\|_{B(0,r)}\beta.$$

On déduit de cette inégalité que la distance entre $(0, 0)$ et l'image de $(\Phi(0), 0)$ par g est majorée par $\|A\|\beta + \delta\beta + \|D^2g\|_{B(0,r)}\beta^2$.

Maintenant, on a :

$$\|\lambda(Y_1) - \lambda(Y_2)\| \geq \|B(Y_1 - Y_2)\| - \delta(1 + \gamma_0)\|Y_1 - Y_2\|$$

qui est plus grand que $(\|B^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\|Y_1 - Y_2\|$. En particulier, $\|\lambda(Y) - \lambda(0)\| \geq (\|B^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\alpha$ pour $Y \in \partial B(0, \alpha)$. Comme $\|\lambda(0)\|$ est inférieur à $\|A\|\beta + \delta\beta + \|D^2g\|_{B(0,r)}\beta^2$, on en déduit que $\pi_0(g(\text{graphe de } \Phi))$ contient $B(0, (\|B^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \gamma_0))\alpha - \|A\|\beta - \delta\beta - \|D^2g\|_{B(0,r)}\beta^2) = B(0, r')$.

Il reste à majorer $\|\Psi(0)\|$. On a :

$$\|\Psi(0) - \Psi(\lambda(0))\| \leq \gamma_0\|\lambda(0)\|$$

(si on suppose que $\delta \leq \epsilon(\gamma_0, \gamma)$). On obtient alors (toujours avec la majoration de la distance entre $(0, 0)$ et $(\Psi(\lambda(0)), \lambda(0)) = g(\Phi(0), 0)$)

$$\|\Psi(0)\| \leq (1 + \gamma_0)(\|A\|\beta + \delta\beta + \|D^2g\|_{B(0,r)}\beta^2).$$

C'est l'estimée que l'on cherchait.

□

On va passer maintenant à la démonstration des deux formules.

5 Démonstration de la première inégalité du théorème

Commençons par rappeler la définition de l'entropie métrique.

Notons $d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\}$ et $B_n(x, \delta)$ la boule de centre x et de rayon δ pour cette métrique. Par le théorème de Brin et Katok (voir [4]), l'entropie métrique de μ est donnée par la formule :

$$h(\mu) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_n -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, \delta))$$

pour μ -presque tout x .

On va maintenant faire quelques uniformisations.

Soit $\Lambda_{\delta, n} = \{x, \mu(B_n(x, \delta)) \leq e^{-h(\mu)n + \gamma n}\}$.

Si δ est pris petit on a

$$\frac{4}{5} \leq \mu(\{x, \liminf_n -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x, \delta)) \geq h(\mu) - \frac{\gamma}{2}\}) \leq \mu(\cup_{n_0} \cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\delta, n}).$$

En particulier, si on prend n_0 grand, on a : $\mu(\cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\delta, n}) \geq 3/4$.

Rappelons que l'on note \hat{Y} l'ensemble des bons points de \hat{X}^* pour la théorie de Pesin.

Posons

$$\hat{Y}_{\alpha_0} = \{\hat{x} \in \hat{Y}, \alpha_0 \leq \|C_\gamma(\hat{x})^{\pm 1}\| \leq \frac{1}{\alpha_0}, V(\hat{x}) \geq \alpha_0\}$$

(voir le paragraphe 3 pour les notations). Si α_0 est suffisamment petit, on a $\hat{\mu}(\hat{Y}_{\alpha_0}) \geq 3/4$ d'où $\mu(A_{n_0}) \geq 1/2$ avec $A_{n_0} = \pi(\hat{Y}_{\alpha_0}) \cap (\cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\delta, n})$.

Maintenant, comme pour les points x de A_{n_0} on a $\mu(B_n(x, \delta)) \leq e^{-h(\mu)n + \gamma n}$, on peut trouver un ensemble $\{x_i\}_{1 \leq i \leq N}$ d'éléments de A_{n_0} avec $N \geq \frac{1}{2}e^{h(\mu)n - \gamma n}$ tels que $x_i = \pi(\hat{x}_i)$ où $\hat{x}_i \in \hat{Y}_{\alpha_0}$ et avec les $B_n(x_i, \delta/2)$ disjointes (i.e. les points x_i sont (n, δ) -séparés).

Voici le plan de la démonstration de la formule. Dans celle-ci, on adapte des idées de J. Buzzi (voir [5]) et S. E. Newhouse (voir [21]) à notre contexte : celui des applications méromorphes. En chaque point x_i nous allons construire une variété stable approchée W_i de dimension $k - (s - l) + 1$ (dans tout ce texte les dimensions seront des dimensions complexes). Cela signifiera en particulier que le diamètre de $f^q(W_i)$ restera inférieur à $\delta/4$ ($q = 0, \dots, n-1$) et que les W_i seront assez plates. Ensuite, dans un deuxième paragraphe nous minorerons le volume $k - s + l + 1$ -dimensionnel de ces variétés par à peu près $e^{-2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n}$. Le volume total de toutes ces variétés est donc essentiellement supérieur à $e^{h(\mu)n - 2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n}$. Les W_i étant assez plates, on pourra trouver un plan P de dimension $k - s + l + 1$ tel que d'une part la projection de tous les W_i sur P soit de volume minoré par la même quantité et d'autre part les W_i seront des graphes au-dessus de P . Maintenant, si π_1 désigne la projection orthogonale sur P , la minoration de volume implique que les fibres de π_1 (qui sont des plans de dimension $s - l - 1$) coupent $\cup W_i$ en moyenne en au moins $e^{h(\mu)n - 2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n}$ points. Mais vu que les x_i sont (n, δ) -séparés et que les

diamètres des poussés en avant des W_i restent petits, l'intersection d'une fibre de π_1 avec $\cup W_i$ donne des points $(n, \delta/2)$ -séparés. Cela signifie qu'en moyenne le nombre de points $(n, \delta/2)$ -séparés dans une fibre de π_1 est minoré par $e^{h(\mu)n - 2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n}$. Enfin, dans le troisième paragraphe nous donnerons une majoration de cette moyenne par essentiellement $(\max_{0 \leq q \leq s-l-1} d_q)^n$ et cela prouvera l'inégalité.

5.1 Construction des variétés stables approchées

Rappelons que l'on a $\chi_1 \geq \dots > \chi_{s-l} = \dots = \chi_s \geq \dots \geq \chi_k$. On notera $E_1(\hat{x}), \dots, E_m(\hat{x})$ les $E_i(\hat{x})$ du théorème d'Oseledec correspondant aux exposants $\chi_1, \dots, \chi_{s-l-1}$ et $E_{m+1}(\hat{x}), \dots, E_q(\hat{x})$ les $E_i(\hat{x})$ de $\chi_{s-l}, \dots, \chi_k$ (voir le paragraphe 3 pour les notations). Soit :

$$E_u(\hat{x}) = \oplus_{i=1}^m E_i(\hat{x}) \text{ et } E_s(\hat{x}) = \oplus_{i=m+1}^q E_i(\hat{x}).$$

Par ailleurs, $E_s(\hat{x})$ sera dans la suite coupé en deux parties. Soit n_1 le nombre d'exposants parmi $\chi_{s-l}, \dots, \chi_k$ qui sont strictement négatifs (bien sûr n_1 peut être égal à 0). Alors, nous noterons $E_s^1(\hat{x})$ la somme directe des $E_i(\hat{x})$ ($i = m+1, \dots, q$) correspondant aux χ_i strictement négatifs et $E_s^2(\hat{x})$ la somme directe des autres $E_i(\hat{x})$ de $E_s(\hat{x})$. La dimension de $E_s^1(\hat{x})$ est donc n_1 et celle de $E_s^2(\hat{x})$ est $k - s + l + 1 - n_1$.

Soit x un des N points x_i ($x = \pi(\hat{x})$ avec $\hat{x} \in \hat{Y}_{\alpha_0}$). On va construire une variété stable approchée qui passe par x en utilisant la transformée de graphe. Fixons $\gamma_0 > 0$ très petit devant α_0 . Dans toute la suite n sera pris grand par rapport à des constantes qui dépendent de γ_0 et γ .

On se place maintenant dans $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}))E_u(\hat{f}^n(\hat{x})) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}))E_s(\hat{f}^n(\hat{x}))$ et on part de

$$\{0\}^{s-l-1} \times B_2(0, e^{-4p\gamma n}) \times B_1(0, e^{-3p\gamma n}),$$

où $B_2(0, e^{-4p\gamma n})$ est la boule de $\mathbb{C}^{k-s+l+1-n_1}$ de centre 0 et de rayon $e^{-4p\gamma n}$ et $B_1(0, e^{-3p\gamma n})$ est celle de \mathbb{C}^{n_1} de centre 0 et de rayon $e^{-3p\gamma n}$. Cet ensemble est un graphe $(\Phi_n(Y), Y)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}))E_s(\hat{f}^n(\hat{x}))$ (avec $\Phi_n(Y) = 0$).

Lemme 11. *L'image du graphe $(\Phi_n(Y), Y)$ par $g_{\hat{f}^n(\hat{x})}^{-1}$ est un graphe $(\Phi_{n-1}(Y), Y)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))E_s(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))$. Il vérifie de plus $\|\Phi_{n-1}(Y_1) - \Phi_{n-1}(Y_2)\| \leq \gamma_0 \|Y_1 - Y_2\|$.*

Démonstration. Il s'agit d'utiliser le théorème du paragraphe 4.

Tout d'abord, si on prend pour abscisse $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}))E_u(\hat{f}^n(\hat{x}))$ et pour ordonnée $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}))E_s(\hat{f}^n(\hat{x}))$, on a

$$g_{\hat{f}^n(\hat{x})}^{-1}(X, Y) = (AX + R(X, Y), BY + U(X, Y))$$

avec

$$\gamma \leq \|A\| \leq \|(A_\gamma^m(\hat{f}^{n-1}(\hat{x})))^{-1}\| \leq (1 - \gamma) \|(A_\gamma^{m+1}(\hat{f}^{n-1}(\hat{x})))\|^{-1} = (1 - \gamma) \|B^{-1}\|^{-1}$$

par la proposition 9, le théorème de γ -réduction de Pesin et le fait que γ peut être supposé petit par rapport à des constantes qui ne dépendent que des exposants de Lyapounov de μ .

De plus, toujours par cette proposition,

$$\max(\|DR(X, Y)\|, \|DU(X, Y)\|) \leq \tau \|C_\gamma(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))^{-1}\| \|C_\gamma(\hat{f}^n(\hat{x}))\|^2 d(f^{n-1}(x), \mathcal{A})^{-p} \|(X, Y)\|$$

avec $\|(X, Y)\| \leq \frac{\epsilon_0 d(f^{n-1}(x), \mathcal{A})^p}{\|C_\gamma(\hat{f}^n(\hat{x}))\|}$. Mais comme les fonctions $\|C_\gamma^{\pm 1}\|$ sont tempérées et que \hat{x} est dans \hat{Y}_{α_0} , on peut supposer que $\|C_\gamma(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))^{-1}\| \|C_\gamma(\hat{f}^n(\hat{x}))\|^2 \leq \frac{1}{\alpha_0^3} e^{3\gamma n}$ (voir [18] p. 668) et on a $d(f^{n-1}(x), \mathcal{A}) \geq \alpha_0 e^{-n\gamma}$ (voir le lemme 10).

Pour $\|(X, Y)\| \leq e^{-2p\gamma n}$, on obtient :

$$\max(\|DR(X, Y)\|, \|DU(X, Y)\|) \leq e^{4\gamma n} e^{\gamma np} e^{-2\gamma np}$$

qui est très petit car p peut être supposé supérieur à 5. Cette quantité joue le rôle de δ dans le théorème du paragraphe 4. Comme il est aussi petit que l'on veut pourvu que n soit grand, on a bien démontré le lemme. \square

Maintenant, de ce graphe $(\Phi_{n-1}(Y), Y)$, on ne garde que la partie qui se trouve au-dessus de $\{0\}^{s-l-1} \times B_2(0, e^{-3\gamma pn}) \times B_1(0, e^{-3\gamma pn})$ (on fait un cut-off). Puis on prend son image par $g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x})}^{-1}$ qui de nouveau est un graphe $(\Phi_{n-2}(Y), Y)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{n-2}(\hat{x}))E_s(\hat{f}^{n-2}(\hat{x}))$ avec $\|\Phi_{n-2}(Y_1) - \Phi_{n-2}(Y_2)\| \leq \gamma_0 \|Y_1 - Y_2\|$ (la démonstration est exactement la même que dans le lemme précédent).

De ce graphe, on ne garde que la partie au-dessus $\{0\}^{s-l-1} \times B_2(0, e^{-3\gamma pn}) \times B_1(0, e^{-3\gamma pn})$ et on continue ainsi le procédé jusqu'à obtenir un graphe $(\Phi_0(Y), Y)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_s(\hat{x})$ qui vérifie $\|\Phi_0(Y_1) - \Phi_0(Y_2)\| \leq \gamma_0 \|Y_1 - Y_2\|$. Son image par $\tau_x \circ C_\gamma(\hat{x})$ est la variété stable approchée que l'on voulait construire au point x .

On va maintenant minorer le volume de cette variété.

5.2 Minoration du volume des variétés stables

Dans un premier temps, on suppose que $n_1 > 0$.

On repart du graphe $(\Phi_n(Y), Y)$ et cette fois-ci on va tirer en arrière des tranches de celui-ci. Plus précisément considérons :

$$\{0\}^{s-l-1} \times \{a_{s-l}\} \times \cdots \times \{a_{k-n_1}\} \times B_1(0, e^{-3p\gamma n})$$

avec $(a_{s-l}, \dots, a_{k-n_1}) \in B_2(0, e^{-4p\gamma n})$.

Cet élément est un graphe $(\Psi_n(Z), Z)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}))E_s^1(\hat{f}^n(\hat{x}))$.

Pour les mêmes raisons que dans le paragraphe précédent, l'image de ce graphe par $g_{\hat{f}^n(\hat{x})}^{-1}$ est un graphe $(\Psi_{n-1}(Z), Z)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))E_s^1(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))$. Il vérifie de plus $\|\Psi_{n-1}(Z_1) - \Psi_{n-1}(Z_2)\| \leq \gamma_0 \|Z_1 - Z_2\|$.

Par ailleurs, ce graphe vérifie aussi le (pour $\gamma_0 < \gamma$) :

Lemme 12. *La projection du graphe $(\Psi_{n-1}(Z), Z)$ sur $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))E_s^1(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))$ contient la boule $B_1(0, e^{-3p\gamma n})$ et $\|\Psi_{n-1}(0)\| \leq e^{-4p\gamma n+2\gamma}$.*

Démonstration. On applique la deuxième partie du théorème de la transformée de graphe du paragraphe 4.

Ici $\alpha = e^{-3p\gamma n}$, $\beta = e^{-4p\gamma n}$ et $\|B^{-1}\|^{-1} \geq e^\gamma$ car on a sélectionné les exposants strictement négatifs.

Maintenant, on peut prendre $r = e^{-2\gamma np}$ (car $(\Phi_n(Y), Y)$ vit dans $B(0, e^{-2\gamma np})$) et en considérant les estimées obtenues à la fin de la démonstration de la proposition 9, on en déduit (pour n grand) :

$$\|D^2 g_{\hat{f}^n(\hat{x})}^{-1}\|_{B(0,r)} \leq e^{4\gamma n} e^{\gamma np}.$$

Comme dans le paragraphe précédent, le δ du théorème de la transformée de graphe est très petit. On en déduit donc bien que la projection du graphe $(\Psi_{n-1}(Z), Z)$ sur $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))E_s^1(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))$ contient la boule $B_1(0, e^{-3p\gamma n})$.

Pour la majoration de $\|\Psi_{n-1}(0)\|$ il y a deux cas. Soit $n_1 = k - s + l + 1$ (i.e. $\chi_{s-l}, \dots, \chi_k$ sont tous strictement négatifs) et alors $\|\Psi_{n-1}(0)\| = \|\Phi_{n-1}(0)\| = 0$. Soit $n_1 < k - s + l + 1$ et la norme $\|A\|$ du théorème du paragraphe 4 est majorée par e^γ . L'estimée donnée dans ce théorème donne donc $\|\Psi_{n-1}(0)\| \leq e^{-4p\gamma n+2\gamma}$ si γ_0 est très petit devant γ . □

Maintenant, on ne garde que la partie de ce graphe qui se trouve au-dessus de $\{0\}^{k-n_1} \times B_1(0, e^{-3p\gamma n})$. Remarquons que ce cut-off est finalement le même que celui du paragraphe précédent (où on gardait la partie au-dessus de $\{0\}^{s-l-1} \times B_2(0, e^{-3\gamma pn}) \times B_1(0, e^{-3p\gamma n})$). En effet, si on prend un point Z dans $B_1(0, e^{-3p\gamma n})$, on a $\|\Psi_{n-1}(Z) - \Psi_{n-1}(0)\| \leq \gamma_0 \|Z\| \leq \gamma_0 e^{-3p\gamma n}$. On en déduit que $\|\Psi_{n-1}(Z)\| \leq 2\gamma_0 e^{-3p\gamma n}$ et donc que la projection de $(\Psi_{n-1}(Z), Z)$ sur $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))E_s^1(\hat{f}^{n-1}(\hat{x}))$ est incluse dans $B_2(0, e^{-3\gamma pn}) \times B_1(0, e^{-3p\gamma n})$.

On recommence maintenant tout ce que l'on vient de faire en poussant en avant par $g_{\hat{f}^{n-1}(\hat{x})}^{-1}$ et ainsi de suite. A la fin, on obtient un graphe $(\Psi_0(Z), Z)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_s^1(\hat{x})$ qui contient $B_1(0, e^{-3\gamma pn})$ et avec $\|\Psi_0(0)\| \leq e^{-4\gamma pn+2\gamma n}$. De plus ce graphe est assez plat car il vérifie $\|\Psi_0(Z_1) - \Psi_0(Z_2)\| \leq \gamma_0 \|Z_1 - Z_2\|$.

En faisant varier $(a_{s-l}, \dots, a_{k-n_1}) \in B_2(0, e^{-4p\gamma n})$, on a donc feuilleté la variété stable approchée. Grâce à cette propriété, nous allons pouvoir minorer le volume $k - s + l + 1$ -dimensionnel de cette variété.

On se place dans $C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_u(\hat{x}) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_s^2(\hat{x}) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_s^1(\hat{x})$ et on considère un plan complexe de dimension $k - n_1$ de la forme $x_{k-n_1+1} = b_{k-n_1+1}, \dots, x_k = b_k$ avec $(b_{k-n_1+1}, \dots, b_k) \in B_1(0, e^{-3\gamma pn})$. L'intersection I_0 de ce plan avec le graphe $(\Phi_0(Y), Y)$ de la variété stable est de dimension $k - n_1 - s + l + 1$. Nous allons minorer le volume $k - n_1 - s + l + 1$ -dimensionnel de cette intersection par environ $e^{-2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n}$. Cela impliquera que le volume $k - s + l + 1$ -dimensionnel du graphe $(\Phi_0(Y), Y)$ (on note W_0 cette variété) sera supérieur à

$$e^{-2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n - 6\gamma p n n_1}.$$

En effet, par la formule de la coaire (voir [11] p. 258), ce volume est supérieur à :

$$\int_{B_1(0, e^{-3\gamma p n})} \int_{\pi_2^{-1}(Z) \cap W_0} d\mathcal{H}^{2(k-s+l+1-n_1)} d\mathcal{H}^{2n_1}(Z),$$

(où π_2 est la projection orthogonale sur $C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_s^1(\hat{x})$). Et cette dernière quantité est plus grande que $e^{-2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n - 6\gamma p n n_1}$.

Il reste donc à montrer que le volume $i_0 = k - n_1 - s + l + 1$ -dimensionnel de I_0 est supérieur à environ $e^{-2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n}$.

Avant cela faisons une remarque. On a supposé jusqu'ici que $n_1 > 0$. Lorsque $n_1 = 0$, on ne fait pas le tranchage du début de ce paragraphe et on passe directement à la minoration de I_0 qui est égal à W_0 que l'on va faire maintenant.

Dans un premier temps, on va évaluer le volume de $g_{\hat{x}}(I_0)$ en fonction de celui de I_0 . On a :

$$\int_{I_0} \|\Lambda^{i_0} Dg_{\hat{x}}(Z)\|^2 d\mathcal{H}^{2i_0} = \text{volume}(g_{\hat{x}}(I_0))$$

toujours par la formule de la coaire (ici on considère $g_{\hat{x}} : I_0 \rightarrow g_{\hat{x}}(I_0)$ comme fonction sur I_0 et $Dg_{\hat{x}}(Z)$ désigne toujours la différentielle complexe). Il s'agit de majorer $\|\Lambda^{i_0} Dg_{\hat{x}}(Z)\|$ avec $Z \in I_0$. Tout d'abord cette quantité est inférieure à $\|\Lambda^{i_0} Dg_{\hat{x}}(Z)\|$ où cette fois-ci $g_{\hat{x}}$ est considérée comme fonction sur W_0 . Maintenant,

$$\|\Lambda^{i_0} Dg_{\hat{x}}(Z)\| = \|Dg_{\hat{x}}(Z)v_1 \wedge \dots \wedge Dg_{\hat{x}}(Z)v_{i_0}\|$$

pour certains v_1, \dots, v_{i_0} tangents à W_0 (voir [1] p. 119-120 pour les propriétés des produits extérieurs). Soient u_1, \dots, u_{i_0} la projection sur $C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_s(\hat{x})$ de v_1, \dots, v_{i_0} . Cela signifie que pour $i = 1, \dots, i_0$ on a $v_i = (D\Phi_0(P)\alpha_i, \alpha_i)$ et $u_i = (0, \alpha_i)$ où P est la projection orthogonale de Z sur $C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_s(\hat{x})$. D'après le contrôle sur le graphe $(\Phi_0(Y), Y)$, on a $\|D\Phi_0(P)\alpha_i\| \leq \gamma_0 \|\alpha_i\|$. Cela implique que $\|v_1 \wedge \dots \wedge v_{i_0} - u_1 \wedge \dots \wedge u_{i_0}\| \leq \epsilon(\gamma_0)$ avec $\epsilon(\gamma_0)$ aussi petit que l'on veut pourvu que γ_0 le soit. En effet, si on note G l'application linéaire

$$G(X, Y) = (D\Phi_0(P)Y, Y) = \begin{pmatrix} 0 & D\Phi_0(P) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

on a

$$\|v_1 \wedge \dots \wedge v_{i_0} - u_1 \wedge \dots \wedge u_{i_0}\| \leq \|(\Lambda^{i_0} G - \Lambda^{i_0} \mathcal{I})(u_1 \wedge \dots \wedge u_{i_0})\|$$

où

$$\mathcal{I}(X, Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Enfin $\|\Lambda^{i_0} G - \Lambda^{i_0} \mathcal{I}\|$ est aussi petit que l'on veut pourvu que γ_0 le soit (par le théorème des accroissements finis).

Maintenant,

$$\|\Lambda^{i_0} Dg_{\hat{x}}(Z)\| = \|Dg_{\hat{x}}(Z)v_1 \wedge \dots \wedge Dg_{\hat{x}}(Z)v_{i_0}\|$$

vérifie :

$$\|\Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(Z)\| \leq \|\Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(0)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i_0})\| + A + B$$

avec

$$A = \|(\Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(Z) - \Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(0))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i_0})\|$$

$$B = \|\Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(0)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i_0} - u_1 \wedge \cdots \wedge u_{i_0})\|.$$

A est inférieur à $\|\Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(Z) - \Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(0)\|$ qui est aussi petit que l'on veut pourvu que l'on prenne n grand. En effet d'une part comme à chaque étape on fait un cut-off, Z vit ici dans la boule centrée en $(0,0)$ et de rayon $e^{-2\gamma p n}$, d'autre part on a un contrôle de la différentielle seconde qui est donnée par la proposition 8.

Comme B est inférieur à $\epsilon(\gamma_0)$, on obtient pour n grand (en particulier devant des constantes qui dépendent de γ_0) :

$$\|\Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(Z)\| \leq \|\Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(0)|_{C_\gamma^{-1}E_s(\widehat{x})}\| + \epsilon(\gamma_0).$$

Mais

$$\|\Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(0)|_{C_\gamma^{-1}E_s(\widehat{x})}\| \leq e^{\chi_{s-l} + \cdots + \chi_{k-n_1} + \gamma k}$$

ce qui implique que

$$\|\Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(Z)\| \leq e^{\chi_{s-l}^+ + \cdots + \chi_k^+ + \gamma k} (1 + \epsilon(\gamma_0)).$$

Le volume de $g_{\widehat{x}}(I_0)$ est donc majoré par $\text{volume}(I_0) \times e^{2\chi_{s-l}^+ + \cdots + 2\chi_k^+ + 2\gamma k} (1 + \epsilon(\gamma_0))^2$.

Maintenant, on prend l'image de $g_{\widehat{x}}(I_0)$ par $g_{\widehat{f}(\widehat{x})}$ et ainsi de suite. En faisant les mêmes calculs que précédemment, on obtient alors une majoration du volume i_0 -dimensionnel de $g_{\widehat{x}}^n(I_0)$ par $\text{volume}(I_0) \times e^{2\chi_{s-l}^+ n + \cdots + 2\chi_k^+ n + 2\gamma k n} (1 + \epsilon(\gamma_0))^{2n}$.

Mais $g_{\widehat{x}}^n(I_0)$ rencontrent tous les

$$\{0\}^{s-l-1} \times \{a_{s-l}\} \times \cdots \times \{a_{k-n_1}\} \times B_1(0, e^{-3p\gamma n})$$

avec $(a_{s-l}, \dots, a_{k-n_1}) \in B_2(0, e^{-4p\gamma n})$. Le volume i_0 -dimensionnel de $g_{\widehat{x}}^n(I_0)$ est donc supérieur à $e^{-8p i_0 \gamma n}$. Autrement dit, on a minoré le volume de I_0 par :

$$e^{-2\chi_{s-l}^+ n - \cdots - 2\chi_k^+ n - 2\gamma k n - 8p i_0 \gamma n} (1 + \epsilon(\gamma_0))^{-2n}$$

qui est supérieur à

$$e^{-2\chi_{s-l}^+ n - \cdots - 2\chi_k^+ n - 10p\gamma k n}$$

(car γ_0 est très petit devant γ).

C'est la minoration que l'on cherchait car on obtient une minoration du volume de W_0 par

$$e^{-2\chi_{s-l}^+ n - \cdots - 2\chi_k^+ n - 16p\gamma k n}.$$

On va passer à la majoration du volume de toutes ces variétés stables à l'aide des degrés dynamiques de f .

5.3 Majoration du volume

Nous avons construit des variétés stables pour chaque x_i ($i = 1, \dots, N$) au-dessus de $C_\gamma^{-1}(\hat{x}_i)E_s(\hat{x}_i)$. Considérons maintenant l'image de ces variétés par les $C_\gamma(\hat{x}_i)$. Chaque image est un graphe au-dessus de $E_s(\hat{x}_i)$ (pour le repère $E_u(\hat{x}_i) \oplus E_s(\hat{x}_i)$). De plus, si $(\Phi(Y), Y)$ est l'un d'eux, on a $\|\Phi(Y_1) - \Phi(Y_2)\| \leq \frac{\gamma_0}{\alpha_0^2} \|Y_1 - Y_2\|$ qui est aussi petit que l'on veut pourvu que γ_0 soit petit par rapport à α_0 (ce que l'on a supposé). Quitte à remplacer N par N/K où K est une constante qui ne dépend que de X , on peut supposer que tous ces graphes vivent dans une carte fixée $\psi : U \rightarrow X$ et que les x_i sont à distance au moins ϵ_0 du bord de U (cela signifie que τ_{x_i} est égal à ψ modulo une translation). Toujours quitte à remplacer N par N/K , on peut supposer que les graphes précédents sont des graphes au-dessus d'un plan complexe P de dimension $k - s + l + 1$ et que la projection de chaque graphe sur P est de volume supérieur à

$$e^{-2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n - 16p\gamma kn}$$

(éventuellement redvisé par une constante). Dans ce qui précède le plan P peut être bougé un petit peu.

Le volume $k - s + l + 1$ -dimensionnel de la projection de tous les graphes $W(x_i)$ sur P est donc supérieur à :

$$e^{h(\mu)n - 2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n - 20p\gamma kn}.$$

Nous allons maintenant majorer ce volume à l'aide des degrés dynamiques.

Notons, π_3 la projection orthogonale sur P . $\pi_3(U)$ vit dans un compact K de P et pour $a \in K$, F_a désignera la fibre $\pi_3^{-1}(a)$. Elle est de dimension $s - l - 1$. Dans la suite da sera la mesure de Lebesgue sur un voisinage de K dans P .

Si $\mathcal{W}_s = \cup_{i=1}^N W(x_i)$ et $n(a)$ désigne le nombre d'intersection de F_a avec \mathcal{W}_s , on a :

$$\int n(a) da = \text{volume de la projection de } \mathcal{W}_s \text{ sur } P$$

est supérieur à

$$e^{h(\mu)n - 2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n - 20p\gamma kn}.$$

Cependant, pour a fixé, les images par ψ des points d'intersection entre F_a et \mathcal{W}_s sont $(n, \delta/2)$ -séparés. En effet considérons $y_1 \in \psi(F_a \cap W(x_i))$ et $y_2 \in \psi(F_a \cap W(x_j))$. Par définition des x_i , on a $d_n(x_i, x_j) \geq \delta$. Cela signifie qu'il existe l compris entre 0 et $n - 1$ avec $d(f^l(x_i), f^l(x_j)) \geq \delta$. Mais le diamètre de $f^l(\psi(W(x_i)))$ et de $f^l(\psi(W(x_j)))$ est inférieur à $\delta/4$ (car on a fait des cut-off) ce qui implique que $d(f^l(y_1), f^l(y_2)) \geq \delta/2$. Les points y_1 et y_2 sont $(n, \delta/2)$ -séparés.

Si $\Omega_f = X \setminus \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(I_f)$, on notera $\Gamma_n(a)$ l'adhérence de $\{(z, f(z), \dots, f^{n-1}(z))\}$, $z \in \psi(F_a \cap U) \cap \Omega_f$ dans X^n . C'est le multigraphe de $\psi(F_a \cap U)$. On munit X^n de la forme de Kähler $\omega_n = \sum_{i=1}^n \Pi_i^* \omega$ où les Π_i sont les projections de X^n sur ses facteurs. Maintenant, on a :

Lemme 13.

$$\int \text{volume}(\Gamma_n(a)) da \geq c(\delta) \int n(a) da.$$

Démonstration. La démonstration est la même que dans [3] (paragraphe 5) et [15]. Elle repose sur le théorème de Lelong (voir [19]). Nous la donnons par confort pour le lecteur.

On fixe a . Les n -orbites des points d'intersection entre $\psi(F_a \cap U)$ et $\psi(\mathcal{W}_s)$ induisent un ensemble F de $\Gamma_n(a)$ qui est $\delta/2$ -séparé pour la métrique produit de X^n . Cela signifie que les $n(a)$ boules $B(y, \delta/4)$ avec $y \in F$ sont disjointes. Par le théorème de Lelong, le volume de $\Gamma_n(a) \cap B(y, \delta/4)$ est minoré par une constante $c(\delta)$. On en déduit donc que le volume de $\Gamma_n(a)$ est plus grand que $c(\delta)n(a)$. Cela démontre le lemme. \square

Maintenant,

$$\int \text{volume}(\Gamma_n(a)) da = \int \int_{\Gamma_n(a)} w_n^{s-l-1} da$$

est égal à

$$\int \left(\sum_{0 \leq n_1, \dots, n_{s-l-1} \leq n-1} \int_{\psi(F_a \cap U) \cap \Omega_f} (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_{s-l-1}})^* \omega \right) da$$

par définition de ω_n et le fait que l'on peut prendre P générique. Soit $\Omega = \int [\psi(F_a \cap U)] da$ avec $[\psi(F_a \cap U)]$ le courant d'intégration sur $\psi(F_a \cap U)$. Ω est une forme de bidimension $(s-l-1, s-l-1)$.

De l'égalité précédente, on déduit que :

$$\int \text{volume}(\Gamma_n(a)) da = \sum_{0 \leq n_1, \dots, n_{s-l-1} \leq n-1} \int_{\Omega_f} \Omega \wedge (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_{s-l-1}})^* \omega,$$

qui est inférieur à

$$C_0 \sum_{0 \leq n_1, \dots, n_{s-l-1} \leq n-1} \int_{\Omega_f} \omega^{k-s+l+1} \wedge (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_{s-l-1}})^* \omega,$$

où C_0 est une constante telle que $\Omega \leq C_0 \omega^{k-s+l+1}$. En utilisant le lemme 5 avec $q = s-l-1$, on obtient :

$$\int \text{volume}(\Gamma_n(a)) da \leq c_\epsilon n^{s-l-1} \left(\max_{0 \leq j \leq s-l-1} d_j + \epsilon \right)^n.$$

Finalement, en combinant les inégalités obtenues, on a :

$$c_\epsilon n^{s-l-1} \left(\max_{0 \leq j \leq s-l-1} d_j + \epsilon \right)^n \geq e^{h(\mu)n - 2\chi_{s-l}^+ n - \dots - 2\chi_k^+ n - 20p\gamma kn},$$

qui implique la première inégalité du théorème.

6 Démonstration de la deuxième inégalité du théorème

Comme la démonstration est à peu près la même que pour la première formule, on ne fera que l'esquisser.

Rappelons que l'on a $\chi_1 \geq \dots \geq \chi_s = \dots = \chi_{s+l'} > \chi_{s+l'+1} \geq \dots \geq \chi_k$. Pour $\hat{x} \in \hat{Y}_{\alpha_0}$, on notera $E_1(\hat{x}), \dots, E_m(\hat{x})$ les $E_i(\hat{x})$ correspondant aux exposants $\chi_1, \dots, \chi_{s+l'}$ et $E_{m+1}(\hat{x}), \dots, E_q(\hat{x})$ les $E_i(\hat{x})$ de $\chi_{s+l'+1}, \dots, \chi_k$. Soit :

$$E_u(\hat{x}) = \oplus_{i=1}^m E_i(\hat{x}) \text{ et } E_s(\hat{x}) = \oplus_{i=m+1}^q E_i(\hat{x}).$$

Par ailleurs, $E_u(\hat{x})$ sera dans la suite coupé en deux parties. Soit n_1 le nombre d'exposants parmi $\chi_1, \dots, \chi_{s+l'}$ qui sont strictement positifs (bien sûr n_1 peut être égal à 0). Alors, nous noterons $E_u^1(\hat{x})$ la somme directe des $E_i(\hat{x})$ ($i = 1, \dots, m$) correspondant aux χ_i strictement positifs et $E_u^2(\hat{x})$ la somme directe des autres $E_i(\hat{x})$ de $E_u(\hat{x})$. La dimension de $E_u^1(\hat{x})$ est donc n_1 et celle de $E_u^2(\hat{x})$ est $s + l' - n_1$.

On reprend les N points x_i du paragraphe précédent. En chaque $f^n(x_i)$, on peut construire des variétés instables approchées de dimension $s + l'$ par le procédé suivant. Soit x un des x_i (on a $x = \pi(\hat{x})$ avec $\hat{x} \in \hat{Y}_{\alpha_0}$). On se place dans $C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_u(\hat{x}) \oplus C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_s(\hat{x})$ et on part de

$$B_1(0, e^{-3p\gamma n}) \times B_2(0, e^{-4p\gamma n}) \times \{0\}^{k-s-l'},$$

où $B_1(0, e^{-3p\gamma n})$ est la boule de \mathbb{C}^{n_1} de centre 0 et de rayon $e^{-3p\gamma n}$ et $B_2(0, e^{-4p\gamma n})$ celle de $\mathbb{C}^{s+l'-n_1}$ de centre 0 et de rayon $e^{-4p\gamma n}$. Cet ensemble est un graphe $(X, \Phi_0(X))$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{x})E_u(\hat{x})$ (avec $\Phi_0(X) = 0$). Toujours grâce à la transformée de graphe et le procédé de cut-off appliqués aux $g_{\hat{f}^i(\hat{x})}$, on obtient un graphe $(X, \Phi_n(X))$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}))E_u(\hat{f}^n(\hat{x}))$. Par les mêmes arguments qu'au paragraphe précédent, le volume $s + l'$ -dimensionnel de ce graphe est supérieur à

$$e^{2\chi_1^- n + \dots + 2\chi_{s+l'}^- n - 16p\gamma kn}.$$

Pour chaque x_i , on considère l'image du graphe construit au-dessus de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^n(\hat{x}_i))E_u(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$ par $C_\gamma(\hat{f}^n(\hat{x}_i))$. On notera $W(x_i)$ cette image et $\mathcal{W}_u = \cup_{i=1}^N W(x_i)$. Comme dans le paragraphe précédent, quitte à changer N en N/K , on peut supposer que les N variétés $W(x_i)$ vivent dans une carte $\psi : U \rightarrow X$ fixée, que les $W(x_i)$ sont des graphes au-dessus d'un plan P de dimension $s + l'$ et que le volume $s + l'$ -dimensionnel de la projection par π_4 des $W(x_i)$ sur P est supérieur à

$$e^{2\chi_1^- n + \dots + 2\chi_{s+l'}^- n - 16p\gamma kn}.$$

Maintenant, $\pi_4(U)$ vit dans un compact K de P et pour $a \in K$ on notera F_a la fibre $\pi_4^{-1}(a)$. Si $n(a)$ désigne le nombre d'intersection entre F_a et \mathcal{W}_u et da la mesure de Lebesgue sur un voisinage de K dans P , on a :

$$\int n(a) da \geq e^{h(\mu)n + 2\chi_1^- n + \dots + 2\chi_{s+l'}^- n - 20\gamma kn}.$$

Les points d'intersection entre F_a et \mathcal{W}_u induisent un ensemble $(n, \delta/2)$ -séparé dans $f^{-n}(\psi(F_a \cap U))$. En effet les $g_{\widehat{f}^n(\widehat{x}_i)}^{-j}(C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^n(\widehat{x}_i))W(x_i))$ sont de diamètre très petit (pour $j = 0, \dots, n$) et les x_i sont (n, δ) -séparés.

Si on note $\Gamma_n(a)$ le multigraphe de $f^{-n}(\psi(F_a \cap U))$, on a alors (toujours par le théorème de Lelong) :

$$\int \text{volume}(\Gamma_n(a)) da \geq c(\delta) \int n(a) da.$$

Pour finir il reste à majorer $\int \text{volume}(\Gamma_n(a)) da$.

Par un raisonnement équivalent à celui du paragraphe précédent, cette intégrale est inférieure à :

$$C_1 \sum_{0 \leq n_1, \dots, n_{k-s-l'} \leq n-1} \int_{\Omega_f} (f^n)^* \omega^{s+l'} \wedge (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_{k-s-l'}})^* \omega,$$

où C_1 est une constante qui ne dépend que de X . En utilisant le lemme 6, on obtient :

$$c_\epsilon n^{k-s-l'} \left(\max_{s+l' \leq j \leq k} d_j + \epsilon \right)^n \geq e^{h(\mu)n + 2\chi_1^- n + \dots + 2\chi_{s+l'}^- n - 20\gamma kn}.$$

Cela démontre la deuxième inégalité.

7 Le cas des difféomorphismes de classe $C^{1+\alpha}$

Dans ce paragraphe, nous suivons la demande du referee en donnant une version de notre théorème pour les difféomorphismes de classe $C^{1+\alpha}$ dans les variétés Riemanniennes compactes. Nous aboutirons ainsi à une inégalité plus faible que celle de J. Buzzi (voir [5]). Commençons par préciser le cadre de ce paragraphe.

Soit X une variété Riemannienne lisse compacte de dimension k et f un difféomorphisme de classe $C^{1+\alpha}$.

J. Buzzi a introduit dans [5] des notions d'entropie directionnelle. Dans ce paragraphe, nous considérerons la suivante : pour p compris entre 1 et k , on note

$$\mathcal{S}^p := \{\sigma :]-1, 1[^p \mapsto X, \sigma \text{ de classe } C^\infty\}.$$

On définit le p -volume de $\sigma \in \mathcal{S}^p$ par la formule :

$$v_p(\sigma) = \int_{]-1, 1[^p} |\Lambda^p T_x \sigma| d\lambda(x),$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $]-1, 1[^p$ et $|\Lambda^p T_x \sigma|$ est la norme de l'application linéaire $\Lambda^p T_x \sigma : \Lambda^p T_x(]-1, 1[^p) \mapsto \Lambda^p T_{\sigma(x)} X$ induite par la métrique Riemannienne sur X (voir [21]).

Nous désignerons par $\mathcal{S}^p(t)$ les éléments σ de \mathcal{S}^p pour lesquels le p -volume est inférieur ou égal à t .

L'entropie p -directionnelle de f est alors définie par (voir [5])

$$h_p(f) := \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sup_{\sigma \in S^p(t)} \log r(\delta, n, \sigma(\cdot - 1, 1^p)).$$

Ici $r(\delta, n, \sigma(\cdot - 1, 1^p))$ est le cardinal maximal d'un ensemble (n, δ) -séparé inclus dans $\sigma(\cdot - 1, 1^p)$.

Alors, nous avons le :

Théorème 14. *Soient μ une mesure invariante, ergodique et $\chi_1 \geq \dots \geq \chi_k$ les exposants de Lyapounov de μ .*

Fixons $1 \leq s \leq k$. On définit $l = l(s)$ par :

$$\chi_1 \geq \dots \geq \chi_{s-l-1} > \chi_{s-l} = \dots = \chi_s \geq \chi_{s+1} \geq \dots \geq \chi_k,$$

où $s - l$ est égal à 1 si $\chi_1 = \dots = \chi_s$.

Alors, on a l'inégalité suivante :

$$h(\mu) \leq h_{s-l-1}(f) + \chi_{s-l}^+ + \dots + \chi_k^+$$

où $h(\mu)$ est l'entropie métrique de μ et $\chi_i^+ = \max(\chi_i, 0)$.

La preuve de ce théorème s'obtient en faisant des modifications mineures sur notre démonstration. Il s'agit d'utiliser l'introduction du paragraphe 5, le paragraphe 5.1 (qui suivent des idées de S. E. Newhouse et J. Buzzi (voir [21] et [5])) et enfin le paragraphe 5.2 (qui diffère de [21] et [5] et où on réalise la minoration du volume des variétés stables approchées en les feuilletant par des sous-variétés stables). Tous les autres paragraphes concernent les applications méromorphes et sont donc inutiles pour la preuve de cette inégalité.

Expliquons un certain nombre des petites modifications qu'il faut effectuer sur notre démonstration pour prouver l'inégalité ci-dessus.

Tout d'abord pour les rappels. La théorie de Pesin pour les difféomorphismes de classe $C^{1+\alpha}$ est bien connue (voir par exemple [18]). Pour la preuve, on a besoin d'un analogue des propositions 8 et 9. On trouvera essentiellement la démonstration de cet analogue dans la preuve du théorème S.3.1 de [18]. Pour la transformée de graphe (voir le paragraphe 4), il faut supposer g de classe C^{1+a} (i.e. $\|Dg(P) - Dg(Q)\| \leq L\|P - Q\|^a$) et se placer dans \mathbb{R}^k . La seule chose qui change dans le théorème c'est qu'il faut remplacer $\|D^2g\|_{B(0,r)}\beta^2$ par $L\beta^{1+a}$ dans les formules.

Passons maintenant à la preuve de l'inégalité. Elle commence au début du paragraphe 5. Il s'agit ici et dans toute la suite d'enlever les extensions naturelles et la fonction V (car on considère un difféomorphisme). Ensuite dans le plan de la preuve, on remplace la dimension complexe par la dimension réelle et les $2\chi_i^+$ par χ_i^+ . A la fin on change la phrase "Enfin, dans le troisième paragraphe..." par la suivante : "Pour finir la démonstration, il suffit de majorer le nombre de points $(n, \delta/2)$ -séparés dans une fibre de π_1 en utilisant $h_{s-l-1}(f)$ et on aboutit ainsi à l'inégalité annoncée."

La démonstration continue avec le paragraphe 5.1. Ici il s'agit de tout recopier en supposant p grand par rapport à $1/\alpha$, en utilisant l'analogie de la proposition 9 et en changeant \mathbb{C} par \mathbb{R} .

Ensuite, dans le paragraphe 5.2, il faut remplacer les $2\chi_i$ par χ_i , $\mathcal{H}^{2(k-s+l+1-n_1)}$ par $\mathcal{H}^{k-s+l+1-n_1}$ et \mathcal{H}^{2n_1} par \mathcal{H}^{n_1} . Il s'agit après de considérer la différentielle réelle et de changer

$$\int_{I_0} \|\Lambda^{i_0} Dg_{\widehat{x}}(Z)\|^2 d\mathcal{H}^{2i_0} = \text{volume}(g_{\widehat{x}}(I_0))$$

par

$$\int_{I_0} \|\Lambda^{i_0} Dg_x(Z)\| d\mathcal{H}^{i_0} = \text{volume}(g_x(I_0))$$

(formule de la coaire en réel). Enfin quand on parle de la différentielle seconde de $g_{\widehat{x}}$, il faut remplacer cet argument en utilisant le caractère Hölder de la différentielle de f .

Références

- [1] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, (1998).
- [2] J.-Y. Briend et J. Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de \mathbb{CP}^k* , Acta Math., **182** (1999), 143-157.
- [3] J.-Y. Briend et J. Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$* , IHES Publ. Math., **93** (2001), 145-159.
- [4] M. Brin et A. Katok, *On local entropy*, Geometric dynamics, Lect. Notes in Math., **1007** (1983), Springer Verlag, 30-38.
- [5] J. Buzzi, *Entropy, volume growth and Lyapunov exponents*, preprint (1996).
- [6] T.-C. Dinh et C. Dupont, *Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes*, J. Geom. Anal., **14** (2004), 613-627.
- [7] T.-C. Dinh et N. Sibony, *Regularization of currents and entropy*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **37** (2004), 959-971.
- [8] T.-C. Dinh et N. Sibony, *Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle*, Ann. of Math., **161** (2005), 1637-1644.
- [9] T.-C. Dinh et N. Sibony, *Dynamics of regular birational maps in \mathbb{P}^k* , J. Funct. Anal., **222** (2005), 202-216.
- [10] T.-C. Dinh et N. Sibony, *Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds*, J. Amer. Math. Soc., **18** (2005), 291-312.
- [11] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag (1969).
- [12] J.E. Fornæss et N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimensions*, Complex Potential Theory (Montreal, PQ, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **439**, Kluwer, Dordrecht (1994), 131-186.
- [13] J.E. Fornæss et N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimension I*, Astérisque, **222** (1994), 201-231.
- [14] M. Gromov, *Convex sets and Kähler manifolds*, Advances in differential geometry and topology, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, (1990), 1-38.
- [15] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math., **49** (2003), 217-235.
- [16] V. Guedj, *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*, Ann. of Math., **161** (2005), 1589-1607.
- [17] V. Guedj, *Entropie topologique des applications méromorphes*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **25** (2005), 1847-1855.
- [18] A. Katok et B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encycl. of Math. and its Appl., vol. 54, Cambridge University Press, (1995).
- [19] P. Lelong, *Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **67** (1950), 393-419.

- [20] S. Łojasiewicz, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhäuser, (1991).
- [21] S. E. Newhouse, *Entropy and volume*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **8** (1988), 283-299.
- [22] D. Ruelle, *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Brasil Mat., **9** (1978), 83-87.
- [23] A. Russakovskii et B. Shiffman, *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics*, Ind. Univ. Math. J., **46** (1997), 897-932.
- [24] H. Skoda, *Prolongement des courants positifs, fermés de masse finie*, Invent. Math., **66** (1982), 361-376 .

Henry de Thélin
 Université Paris-Sud (Paris 11)
 Mathématique, Bât. 425
 91405 Orsay
 France